

Varianta 37

Subiectul I

- a) $\bar{z} = 7 + i$.
- b) $S = \frac{49\sqrt{3}}{4}$.
- c) $AB = \sqrt{5}$.
- d) $\sin \pi + \cos \pi = -1$.
- e) $d = 5$.
- f) $S = 6$.

Subiectul II

1.

- a) $\log_7 49 = 2$.
- b) $\det B = 51$.
- c) $(f \circ f)(3) = -11$.
- d) $p = \frac{4}{7}$.
- e) $x = \frac{1}{2}$.

2.

- a) $f'(x) = 2007(x-1)^{2006}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2007$.
- c) $f(1) = 0$.
- d) $\int f(x) dx = \frac{(x-1)^{2008}}{2008} + C$.
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{2007}} = 1$.

Subiectul III

- a) $1 * 2 = 1 + 2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 = -3$.
- b) $\forall x, y \in \mathbf{R}$ avem $x * y = x + y - 3xy = y + x - 3yx = y * x$.
- c) $(x * y) * z = x * (y * z) = x + y + z - 3xy - 3xz - 3yz + 9xyz$.
- d) $x * e = x \Leftrightarrow x + e - 3xe = x \Leftrightarrow e(1 - 3x) = 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow e = 0 \in \mathbf{R}$.
- e) $x * 3 = -5 \Leftrightarrow x + 3 - 3 \cdot x \cdot 3 = -5 \Leftrightarrow -8x = -8 \Leftrightarrow x = 1$.
- f) $\sqrt{x+1} * 2 = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 - 6\sqrt{x+1} = -3 \Leftrightarrow -5\sqrt{x+1} = -5 \Rightarrow x = 0 \geq -1$.

g) Parte stabilă: $\forall x, y \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ avem $x \neq \frac{1}{3}, y \neq \frac{1}{3}$ de unde

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) \neq 0 \Rightarrow 3xy - x - y + \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow x + y - 3xy \neq \frac{1}{3} \Rightarrow x * y \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

"*" este asociativă din **c)** și comutativă din **b)**.

Elementul neutru al operației este $0 \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Elemente simetrizabile: $\forall x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}, \exists x' \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} : x * x' = x' * x = e$

$$x + x' - 3xx' = 0 \Leftrightarrow x'(1 - 3x) = -x.$$

Deoarece $x \neq \frac{1}{3} \Rightarrow x' = \frac{x}{3x-1}$. Se arată că $x' \neq \frac{1}{3}$.

În concluzie $\left(\mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}; *\right)$ grup abelian.

Subiectul IV

a) $f(1) = 3; f(-1) = -3$.

b) $f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}, x \in \mathbf{R}^*.$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{2 + x^2}{x} = -\infty$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2 + x^2}{x} = +\infty$; rezultă că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x^2}{x} = +\infty \Rightarrow G_f$ nu admite asimptotă orizontală.

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x^2}{x^2} = 1$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .

e) Din $x \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2 - 2}{x^2} > 0$. Deci $f'(x) > 0, \forall x \in [2, \infty)$. Rezultă că funcția f este crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$.

$$\textbf{f)} \quad \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(x + \frac{2}{x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2 \ln x\right) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} + 2 \ln 2.$$

g) Din punctul **e)** rezultă că funcția f este crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$.

Atunci $\forall x \geq 2$ avem $f(x) \geq f(2) = 3 > 2\sqrt{2}$.